ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

29 Αυγούστου 2005

Απαντήστε και στα τρία θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντάτε αποκλειστικά και μόνον σε ό,τι σας ζητείται και να δικαιολογείτε επαρκώς τις απαντήσεις σας. Διάρκεια εξέτασης: **3 ώρες**.

ΘΕΜΑ 1ο

α) Εστω το σύνολο $S = R - \{-1\}$, εφοδιασμένο με την πράξη: $a * b := a + b + ab$, όπου R το σώμα των πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η $*$ ορίζει μία διμελή πράξη στο S, και ότι $(S, *)$ αποτελεί ομάδα.

β) Εστω a, b στοιχεία μιας ομάδας $(G, \cdot)$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $x \in G$, λύση της εξίσωσης $a \cdot x = b$. Εξηγήστε σε κάθε βήμα της απόδειξης ποιό αξίωμα του ορισμού της ομάδας χρησιμοποιήσατε.

γ) Συμπληρώστε τον κάτωθι πίνακα πολλαπλασιασμού μιας ομάδας $G = \{1, a, b, c\}$ με ουδέτερο στοιχείο το 1:

·	1	a	b	c
1				
a				
b				
c				

Υπόδειξη: Διακρίνετε τις περιπτώσεις: (i) Κάποιο στοιχείο, έστω το a, έχει τάξη 2, και (ii) κανένα στοιχείο της G δεν έχει τάξη 2.

δ) Πώς χρησιμοποιείται το ερώτημα β) στην συμπλήρωση του πίνακα;

ε) Οι διαφορετικές δομές ομάδων που βρήκατε, με ποιές γνωστές ομάδες είναι ισομορφικές;

ΘΕΜΑ 2ο

Εστω H υποομάδα μιας (πολλαπλασιαστικής) ομάδας G. Στην G ορίζουμε τη σχέση

$$x \sim y \iff x^{-1}y \in H.$$

α) Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Σε ποιά σημεία χρησιμοποιήσατε το ότι H υποομάδα της G;

β) Δείξτε ότι η κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου $g \in G$ είναι το αριστερό του σύμπλοκο gH.
γ) Δείξτε ότι για κάθε $g \in G$ υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση $\phi : H \longrightarrow gH$.
δ) Από τα παραπάνω συνάγετε και διατυπώστε το Θεώρημα Lagrange.
ε) Δείξτε ότι δεν υπάρχει μη τετριμμένος ομομορφισμός από την ομάδα Z_7 στην ομάδα Z_4.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Δώστε παράδειγμα ομάδας G, με $|G| = n$, όπου n τυχών θετικός ακέραιος, έτσι ώστε η G να περιέχει υποομάδα τάξης d για κάθε d διαιρέτη του n.
β) Δώστε παράδειγμα ομάδας G, με $|G| = 2k$, για κάποιον θετικό ακέραιο k, έτσι ώστε η G να περιέχει μη αβελιανή υποομάδα τάξης k.
γ) Εστω τα στοιχεία της ομάδας μεταθέσεων S_8:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αναλύστε τις μεταθέσεις σ, ρ και $\sigma^{-1}\rho$ σε γινόμενα ξένων κύκλων. Ποιά η τάξη της σ; Ποιά η τάξη της ρ;
δ) Βρείτε όλα τα αριστερά και όλα τα δεξιά σύμπλοκα της κυκλικής υποομάδας $H = \langle (12) \rangle$ της ομάδας μεταθέσεων S_3. Είναι η H κανονική;
ε) Σύμφωνα με το Θεώρημα Ταξινόμησης Πεπερασμένα Παραγόμενων Αβελιανών Ομάδων, βρείτε όλες τις μη ισομορφικές ΠΠΑ ομάδες τάξης 72.
στ) Εστω $G = \langle a \rangle$ κυκλική ομάδα με γεννήτορα a, και έστω G' τυχούσα ομάδα. Δείξτε ότι ένας ομομορφισμός $f : G \longrightarrow G'$ καθορίζεται από την εικόνα $f(a)$. Στη συνέχεια δείξτε ότι, ενώ τα σύνολα Z, $5Z$ είναι ισομορφικά ως προσθετικές ομάδες, δεν είναι ισομορφικά ως δακτύλιοι.

Καλή επιτυχία!

Σ. Λαμπροπούλου