1°) Έστω τ.μ. $X \sim f(x,\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0<x<1$ όπου $\theta>0$ άγνωστη παράμετρος και τ.δ. $X_1, X_2, \dots, X_n$.

α) Δείξτε ότι η κατανομή της ε.ε. $T = \sum_{i=1}^{n} (-2\theta \ln X_i) \sim \chi^2_{2n}$

(Βρείτε πρώτα την κατανομή της τ.μ. $Y = -2\theta \ln X$)

β) Αν μας δίνεται μόνο ότι $n=10$ και $\sum_{i=1}^{10} \ln x_i = -3{,}2$, να βρείτε ένα 0,95 – Δ.Ε. της παραμέτρου θ.

2°) Έστω ότι η τ.μ. $X \sim f(x,\theta) = \frac{1}{\Gamma(p)\theta^p} x^{p-1} e^{-\frac{1}{\theta}x}$, $x>0$ με $p=2$

α) Με το Λήμμα Neyman–Pearson να κατασκευάσετε ομοιόμορφα ισχυρότατο έλεγχο της $H: \theta=\theta_0=2$ με $A=\theta=\theta_1=3$ επί της βάσει τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ (ε.ε. α)

β) Για $n=10$ και $\sum_{i=1}^{10} x_i = 70$ να αποφανθείτε σε ε.ε. $\alpha=0{,}05$ και να υπολογίσετε την $\beta_\varphi(\theta_1) = E_{\theta_1}\varphi(\underset{\sim}{X})$.

3°) Έστω η τ.μ. $X \sim f(x,\theta) = \theta^2(x+1)(1-\theta)^x$, $x=0,1,2,\dots$ όπου $\theta\in(0,1)$ άγνωστη παράμετρος. Με βάση τ.δ. $x_1, x_2, \dots, x_n$

α) Να βρείτε την ε.μ.π. της θ και της $\alpha(\theta) = \frac{2(1-\theta)}{\theta}$

β) Να εξετάσετε αν η ε.μ.π. της $\alpha(\theta)$ είναι αμερόληπτη και επαρκής για την $\alpha(\theta)$

(Υπόδειξη: $\sum_{k=1}^{\infty} x^k a^x = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(1-a)^{k+1}}$ για $0<a<1$)

4°) Η διάρκεια ζωής ενός προϊόντος είναι τ.μ. X (μήνες) με κατανομή $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x}$, $x>0$. Επί της βάσει τ.δ.

46, 41, 42, 48, 43, 39, 42, 44, 47, 40, 45, 43, 43, 45, 49

α) Να εκτιμήσετε σημειακά την παράμετρο θ

β) Να εκτιμήσετε σημειακά την Αξιοπιστία $P(X>45)$

γ) Να εκτιμήσετε την $P(X>45)$ από το πλήθος των παρατηρήσεων που υπερβαίνουν το 45. Ποια εκτίμηση είναι πιό αξιόπιστη;