ΣΧΟΛΗ: Ε.Μ.Φ.Ε. **Ιούνιος 2005**
ΕΞΑΜΗΝΟ: 4ο

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1:

Α) Να διατυπώσετε το Παραγοντικό Θεώρημα Fisher-Neyman και να το αποδείξετε για την διακριτή περίπτωση μόνο.

Β) Να εξετάσετε αν η ομοιόμορφη κατανομή $U(\alpha,\theta)$, με α γνωστό και $\theta \in \Omega = (\alpha, +\infty)$ άγνωστη παράμετρος, ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών. Δίνεται ότι αν $X \sim U(\alpha,\theta)$ τότε η σ.π.π. της X είναι $f_X(x) = \frac{1}{(\theta-\alpha)} I_{(\alpha,\theta)}(x)$, $\theta > \alpha$.

ΘΕΜΑ 2:

Α) Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή Poisson $P(\lambda)$, με $\lambda > 0$ άγνωστη παράμετρος. Να δείξετε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $T_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ και $T_2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες για το λ.

Β) Χρησιμοποιώντας όσα θεωρήματα είναι απαραίτητα, αποφανθείτε ποια από τις δύο εκτιμήτριες του Α) ερωτήματος είναι «καλύτερη».

Δίνεται ότι αν $X \sim P(\lambda)$ τότε η σ.μ.π. της X είναι $f_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $\lambda > 0$ και $x = 0,1,\ldots$. Δίνεται ακόμα ότι $E(X) = V(X) = \lambda$.

ΘΕΜΑ 3:

Α) Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την Γεωμετρική κατανομή $G(\theta)$, με $0 < \theta < 1$ άγνωστη παράμετρος.

i) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π., έστω T, της $\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

ii) Να δείξετε ότι η T είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της $\alpha(\theta)$.

Β) Με την βοήθεια της ανισότητας Cramér-Rao να αποδείξετε ότι η T είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $\alpha(\theta)$. Δίνεται ότι αν $X \sim G(\theta)$ τότε η σ.μ.π. της X είναι $f_X(x) = \theta(1-\theta)^{x-1}$, με $x = 1,2,\ldots$ και $0 \le \theta \le 1$. Ακόμα δίνεται ότι $E(X) = \frac{1}{\theta}$ και $V(X) = \frac{(1-\theta)}{\theta^2}$.

ΘΕΜΑ 4:

Α) Έστω ότι επιθυμούμε να εκτιμήσουμε το μέσο χρόνο που κάνει ένα τρένο του μετρό για να μεταβεί από το Μέγαρο Μουσικής στο Σύνταγμα. Χρονομετρώντας τη διαδρομή αυτή 5 φορές σημειώνουμε τους χρόνους (σε seconds)

137, 151, 157, 152, 160.

Αν υποθέσουμε ότι οι χρόνοι ακολουθούν την κανονική κατανομή να δοθεί:

i) Ένα 99% Δ.Ε. για το μέσο χρόνο μετάβασης.

ii) Ένα 99% Δ.Ε. για την διασπορά του χρόνου μετάβασης.

Β) Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x\,;\,\theta) = \exp[-(x-\theta)]\, I_{(\theta,+\infty)}(x), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

i) Αποδείξτε ότι η $T = \min X_i$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση του θ.

ii) Αποδείξτε ότι η $Y = 2n\,(T-\theta) \sim \chi^2_2$.

iii) Κατασκευάστε ένα 95% Δ.Ε. για το θ.

Δίνεται ότι αν $X \sim \chi^2_n$ τότε η σ.π.π. της X είναι $f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{\left(-\frac{x}{2}\right)}$, με $n = 1,2,\ldots$ και $x \in \mathbb{R}^+$. Δίνεται ακόμα ότι $\Gamma(1) = 1$.

* ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ: Α: 1.5, Β: 1.0 * ** Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ h**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ