**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΈΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**Διδάσκοντες: Ι. Κολέτσος & Γ. Παπαγεωργίου** **28-06-2004**

**1. a)** Δίνεται ο πίνακας:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα εφαρμόζοντας την μέθοδο απαλοιφής *Gauss*.

**b)** Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} x = b .$$

Να υπολογιστούν οι επαναληπτικοί πίνακες $B_J$ και $B_{G-S}$ των μεθόδων *Jacobi* και *Gauss-Seidel* αντίστοιχα, και στην συνέχεια με βάση αυτούς, να εξετάσετε αν οι αντίστοιχες επαναληπτικές μέθοδοι συγκλίνουν.

**c)** Δίνεται ο πίνακας:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $a$ αυθαίρετος πραγματικός αριθμός. Να δειχθεί ότι η μέθοδος *Jacobi* για την επίλυση του $\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$ συγκλίνει, αν και μόνο αν $-1/2<a<1/2$. **(Μονάδες: 1, 1, 1)**

**2.** Να υπολογιστεί μια προσέγγιση του ολοκληρώματος:

$$I=\int_0^{0.8} e^{-x^2}\,dx .$$

με τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου με $N=4$. (Απλός τύπος: $\int_{x_0=a}^{x_1=b} f(x)\,dx=\frac{h}{2}\{f_0+f_1\}$).

Να βρεθεί το ελάχιστο $N$, ώστε το σφάλμα ολοκλήρωσης με το σύνθετο τύπο τραπεζίου να είναι μικρότερο του $10^{-4}$. ( Τύπος σφάλματος απλού $E=-{h^3}/{12}\,f''(\xi)$). **(Μονάδες: 1.5)**

**3. α)** Δίνεται το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων

$$f_1(x,y)=x+y-3=0$$
$$f_2(x,y)=x^2+y^2-9=0$$

Να υπολογιστεί ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου *Newton-Rapshon* για την προσέγγιση της λύσης του συστήματος, και να εφαρμοστεί δύο φορές για την προσέγγιση της λύσης $(x,y)=(0,3)^{\mathrm{T}}$ με αρχικό διάνυσμα $(x_0,y_0)=(1,5)^{\mathrm{T}}$.

$(\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{J}^{-1}\mathbf{f},\ k=0,1,2,\ldots)$

**β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x-2,\ x>0$. Θεωρούμε τις γενικές επαναληπτικές μεθόδους:

$$x_{k+1}=x_k^2-2,\ k=0,1,2,\ldots$$

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k},\ k=0,1,2,\ldots$$

Να ελεγχθεί η σύγκλιση των παραπάνω μεθόδων για $x_0$ κοντά στη ρίζα $\bar{x}=2$, χρησιμοποιώντας κατάλληλο θεώρημα.

**γ)** Η εξίσωση: $x=1-(1/4)\sin x$, (το $x$ σε ακτίνια). έχει μοναδική ρίζα $\rho$ στο **R**. 1 Να υπολογιστούν οι τρεις πρώτες προσεγγίσεις της ρίζας $\rho$ με την μέθοδο διχοτόμησης και αρχικό διάστημα το $[0,1]$. 2 Να δειχθεί η γενική εκτίμηση σφάλματος της μεθόδου διχοτόμησης, και στην συνέχεια 3 να υπολογιστεί πόσο το πολύ απέχει η τρίτη προσέγγιση που υπολογίσατε από την ρίζα $\rho$. **(Μονάδες: 1, 1, 1)** 1,3

**4) α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-\cos\frac{\pi x}{2}$. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής *Newton* που παρεμβάλει την συνάρτηση στα σημεία $x_0=1,\ x_1=2,\ x_2=3$, με διηρημένες διαφορές. Εν συνεχεία να βρεθεί επίσης και μία εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής της μορφής: $|f(x)-p(x)|\le M,\ \forall\ x\in[1,\ 3]$, εφαρμόζοντας τον αντίστοιχο τύπο σφάλματος της παρεμβολής *Lagrange*. $\left\{f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right\}$.

$$P_k^N(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\ldots+$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})f[x_0,x_1,\ldots,x_k]$$

**β)** Να εφαρμόσετε αναλυτικά το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων με προσεγγιστικό μοντέλο την συνάρτηση, $f(x)=a\,x^2+\beta\,x+c$, για την προσέγγιση των δεδομένων:

| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 13 | 4 | 3 | -1 | 1 |

υπολογίζοντας μόνο το αντίστοιχο σύστημα των συνθηκών. **(Μονάδες: 1.5, 1)**

1

## ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

## ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3.00 ΩΡΕΣ