Φεβρουάριος 2002

ΤΜΗΜΑ: ΕΜΦΕ
ΕΞΑΜΗΝΟ: 3ο

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1. Α) Μιά κάλπη περιέχει 4 λευκές και 5 μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε μιά σφαίρα στην τύχη και αν είναι λευκή την τοποθετούμε πάλι με άλλες 3 λευκές, ενώ αν είναι μαύρη την τοποθετούμε πάλι με άλλες 2 μαύρες. Προβαίνουμε σε δεύτερη λήψη μιάς σφαίρας από την κάλπη. Ποιά η πιθανότητα να είναι λευκή (αγνοώντας φυσικά το αποτέλεσμα της πρώτης λήψης);

Β) Έστω τ.μ. X με εκθετική κατανομή $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Δείξτε ότι η τ.μ. $Y = e^{-X}$ είναι ομοιόμορφη στο διάστημα (0, 1).

2. Το ζεύγος των τ.μ. X, Y, έχει από κοινού σ.π.π.

$$f(x, y) = 8xy, \quad \text{όταν } 0 < y < x < 1,$$
$$f(x, y) = 0, \quad \text{αλλού.}$$

Να βρείτε:

(i) Τις περιθώριες σ.π.π. f_X και f_Y.
(ii) Τις E[X] και E[Y].
(iii) Την Cov(X, Y).

3. Το ύψος του νερού (σε m) σε κάποιο σημείο ενός χειμάρου κατά τη διάρκεια του χειμώνα είναι τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{9}\, x \exp(-x^2/18), \quad x > 0.$$

(i) Να βρείτε την συνάρτηση κατανομής F της μέγιστης ανύψωσης Y των προσεχών 4 ετών.
(ii) Ποιά η πιθανότητα ώστε τα προσεχή 4 έτη το μέγιστο ύψος να μην υπερβεί τα $5m$.

4. Α) Η λειτουργία ενος συστήματος βασίζεται σε ένα εξάρτημα του οποίου η διάρκεια ζωής είναι τ.μ. X με μέση τιμή $E[X] = 2000\ h$ και διασπορά $V[X] = 150^2\ h^2$.

(i) Αν διατίθενται 12 τέτοια εξαρτήματα που αντικαθιστώνται διαδοχικά στο σύστημα, ποιά η πιθανότητα ώστε η διάρκεια λειτουργίας του συστήματος με αυτά τα 12 εξαρτήματα να υπερβεί τις 23000 h;
(ii) Πόσα εξαρτήματα απαιτούνται ώστε με πιθανότητα 0.99 να λειτουργήσει το σύστημα για τουλάχιστον 50000 h;

Β) Δείξτε ότι

$$V[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = \Sigma_j V[X_j] + 2\, \Sigma_{j<k} \mathrm{Cov}(X_j, X_k).$$