Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ..Φίλιος....Κωνσ.Ταντίνος.....

Θέμα 1 (i) Ποιός είναι ο μέγιστος όγκος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου όταν οι διαστάσεις του μεταβαλλονται αλλά το άθροισμα των μηκών των ακμών του παραμένει ίσο με 12m;
(ii) Να εξεταστεί αν η εξίσωση, $\cos(\pi x)- x^2y+e^{xz}+yz- 4=0$ μπορεί να λυθεί ως προς z σε μια περιοχή του σημείου (0,1,2). Αν ναι, βρείτε το πολυώνυμο Taylor δευτέρου βαθμού της λύσεως $z=z(x,y)$ σε περιοχή του σημείου $(x_0, y_0)=(0,1)$.

Θέμα 2 Να υπολογιστεί η ροπή αδρανείας ως προς την αρχή των αξόνων ομογενούς επίπεδου υλικού σώματος ($\delta(x,y)=1$) που καταλαμβάνει το χωρίο,

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\geq 0,\ (x-1)^2+y^2\leq 1,\ x^2+y^2\geq 1\ \}.$$

Θέμα 3 Να υπολογιστεί το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την κυκλοειδή,

$$x=\alpha\,(t-\sin t)\ ,\quad y=\alpha\,(1-\cos t)\ ,\quad t\in[0,2\pi]$$

και τον x-άξονα.

Θέμα 4 (i) Θεωρούμε την ισότητα των ολοκληρωμάτων στο θεώρημα Gauss,

$$\Pi=\iint_{\partial\Omega}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}d\sigma=\iiint_{\Omega}div\mathbf{V}dxdydz\,.$$

όπου $\mathbf{V}=\mathbf{V}(x,y,z)$ διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων.
Τι συμπεραίνετε στις περιπτώσεις $\Pi>0$, $\Pi=0$, $\Pi<0$.
(ιι) Να υπολογιστεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}(x,y,z)=(0, y^2, z)$ μέσω της επιφάνειας $\partial\Omega$ του χωρίου $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\leq z\leq 4\}$ προσανατολισμένης από το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που δείχνει στο εξωτερικό του Ω.

Θέμα 5 Δίδεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.

(i) Να εξεταστεί αν το **F** είναι συντηρητικό στο πεδίο ορισμού του.

(ii) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(-1,0)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ κατά μήκος των ακόλουθων δύο πολυγωνικών γραμμών:

(**α**) $(1,0)\to(1,1)\to(-1,1)\to(-1,0)$
(**β**) $(1,0)\to(1,-1)\to(-1,-1)\to(-1,0)$.

Τι παρατηρείτε; συμφωνούν τα αποτελέσματα με την απάντηση σας στο ερώτημα (i).

Θέμα 6 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_S(rot\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}d\sigma$, όπου $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2+y-4,\ 3xy,\ 2xz+z^2)$, S η επιφάνεια του ημισφαιρίου $x^2+y^2+z^2=16$, $z\geq 0$ και **n** το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της σφαίρας που δείχνει στο εξωτερικό της σφαίρας.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

21 Φεβρουαρίου 2003