ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ 30/9/2002
Διδάσκων Β. Κανελλόπουλος
Τμήμα Α-Ι

1. (i) Έστω $X \subset \mathbb{R}$, $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Δώστε τον ορισμό της σημειακής και της ομοιόμορφης σύγκλισης της ακολουθίας $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην f.
(ii) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ ώστε να υπάρχει $M > 0$ με $|f_n(x)| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall x \in \mathbb{R}$. Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.
(iii) Εξετάστε ως προς τη σημειακή και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων:
(α) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, με $f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$.
(β) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, με $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$.

2. (i) Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
(α) Δώστε τον τύπο της ακτίνας σύγκλισης R της δυναμοσειράς και αν $R > 0$ δώστε τη μορφή της $f'(x)$ και της $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ για $x \in (-R, R)$.
(β) Αν $R > 0$ και $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $f(x) = 0$, $\forall x \in (-R, R)$.
(ii) Θεωρώντας γνωστό ότι $\forall x \in (-1,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$,
(α) Υπολογίστε το άθροισμα $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $x \in (-1,1)$.
(β) Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $x \in (-1,1)$ και δείξτε ότι
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ $x \in (-1,1)$.

3. (i) Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες και υπολογίστε τον πίνακα των παραγώγων τους.
(α) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x + y^2$.
(β) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $g(x,y) = (xe^y, x^2 + y)$.
(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Υπολογίστε τις $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ και δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.
(iii) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου των παρακάτω επιφανειών στα αντίστοιχα σημεία.
(α) $f(u,v) = (uv, u+v, (u+v)^2)$, $\quad (u,v) = (-1,1)$.
(β) $z = 2x^2 - y^2$, $\quad (x,y) = (1,-1)$.

4. (i) Έστω $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, λεία καμπύλη ώστε το ίχνος της να βρίσκεται στην επιφάνεια μιας σφαίρας του $\mathbb{R}^3$ κέντρου $(0,0,0)$. Δείξτε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{r}'(t)$ είναι κάθετο στο $\mathbf{r}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
(ii) Ένα ζωύφιο βρίσκεται μέσα σε τοξικό περιβάλλον. Ο βαθμός τοξικότητας δίνεται από τη σχέση $T(x,y) = 2x^2 - 4y^2$. Το ζωύφιο βρίσκεται στη θέση $(-1,2)$. Σε ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί για να βρεθεί το ταχύτερο δυνατό σε περιοχή χαμηλότερης τοξικότητας; Να εξηγήσετε πλήρως τα επιχειρήματά σας.

5. (i) Να μελετηθεί ως προς τα στάσιμα σημεία και τα τοπικά ακρότατα η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$.
(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 - y^2$ και ο μοναδιαίος κύκλος του $\mathbb{R}^2$, $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Βρείτε τα σημεία του S όπου η $f|_S$ λαμβάνει μέγιστη καθώς και τα σημεία όπου λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!