Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Εξετάσεις Ανάλυσης ΙΙ, 5 Ιουλίου 2003
Διδάσκοντες: Ν. Γιαννακάκης, Β. Κανελλόπουλος
Τμήμα Ι

ΘΕΜΑ 1. *(i) Έστω* $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$, f, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ *ώστε* $f_n \rightrightarrows f$. *Έστω* $x_0 \in X$, *ώστε η* f_n *είναι συνεχής στο* x_0 *για κάθε* n. *Δείξτε ότι και η* f *είναι συνεχής στο* x_0.

(ii) Εξετάστε ως προς τη σημειακή και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων:

$$(\alpha)\ f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \ f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, \quad (\beta)\ g_n : [0,2] \to \mathbb{R},\ \ g_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

(για το (β) να εξετάσετε πρώτα την σημειακή σύγκλιση της (g_n) *στο* $[0,1]$ *και στο* $[1,2]$*).*

(iii) (α) Διατυπώστε το κριτήριο Weierstrass για την ομοιόμορφη σύγκλιση σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *με* $f_n : X \to \mathbb{R}$.

(β) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2. *(i) Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών:*

$$(\alpha)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}, \quad (\beta)\ \sum_{n=0}^{\infty} (3^n + 4^n) x^n \quad (\gamma)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

(ii) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

(α) Αναπτύξτε την f *σε δυναμοσειρά με κέντρο* $\xi = 0$.
(Δίνεται ότι $\frac{1}{1-\lambda} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots, \quad |\lambda| < 1$*)*

(β) Βρείτε τις $f^{(2003)}(0)$ *και* $f^{(2004)}(0)$.

(γ) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τη συνάρτηση

$$g(x) = \arctan(x), \quad -1 < x < 1.$$

Να δικαιολογήσετε πλήρως τα επιχειρήματα σας.

ΘΕΜΑ 3. *(i) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο:*

$$f(x,y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x.$$

Βρείτε τα στάσιμα σημεία της f και στη συνέχεια ταξινομήστε τα.

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y,z) = x + y - z$ όπου

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^3$.

(α) *Βρείτε τα σημεία $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$ όπου η f παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή αντίστοιχα.*

(β) *Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο σημείο $A(x_1, y_1, z_1)$ όπου η f παρουσιάζει μέγιστο.*

ΘΕΜΑ 4. *(i) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{e}$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$.*

(α) *Δώστε τον ορισμό της παραγώγου της f στο $\vec{x_0}$ κατά την κατεύθυνση $\vec{e}$, $\dfrac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial \vec{e}}$.*

(β) *Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x_0}$, δείξτε ότι $\dfrac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial \vec{e}} = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{e}$.*
Αν επιπλέον $\nabla f(\vec{x_0}) \neq \vec{0}$, βρείτε την κατεύθυνση $\vec{e}$ ως προς την οποία η $\dfrac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial \vec{e}}$ γίνεται μέγιστη.

(ii) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , \ \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(α) *Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.*

(β) *Υπολογίστε τις $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.*

(γ) *Δείξτε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.*

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!