Ανάλυση Ι για Τ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Θέματα εξετάσεων
23 Ιανουαρίου 2001
(Διδάσκων: Σ. Αργυρός)

Θέμα 1ον

(α) Διατυπώστε τα αξιώματα Peano για τους φυσικούς και εξετάστε αν τα ακόλουθα σύνολα ικανοποιούν τα αξιώματα.

$A = \{1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1\}$, $\quad B = \left\{\frac{1}{n} \to \frac{1}{n^2} : n \in \mathrm{N}\right\}$ σελ. 16

$\Gamma = \left\{\frac{1}{n} \to \frac{1}{n+1} : n \in N\right\}$

(Το βέλος δηλώνει το επόμενο στοιχείο).

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση επομένου $s : N \to N$ έχει ως πεδίο τιμών το $N - \{1\}$. σελ. 16

(γ) Δώστε τον ορισμό της διάταξης και δείξτε ότι είναι καλή διάταξη. σελ. 39

Θέμα 2ον

(α) Δοθέντος ότι για $\alpha, \beta \in R$ με $a < \beta$ υπάρχει ρητός $q \in Q$ ώστε $a < q < \beta$ δείξτε:

i) Για $a \in R$ ισχύει $\sup\{q \in Q : q < a\} = a$

ii) Για $a \in R$ υπάρχει γνησίως αύξουσα $\{q_n\}_{n \in N}$ από ρητούς ώστε $\lim q_n = a$

(β) Έστω $(a_n)_{n \in N}$ ακολουθία ώστε οι υπακολουθίες $\{a_{2n}\}_{n \in N}, \{a_{2n+1}\}_{n \in N}$ να συγκλίνουν στο ίδιο $a \in R$. Δείξτε ότι η $(a_n)_{n \in N}$ συγκλίνει στο a.

Θέμα 3ον

(α) Για $f : A \to R$ δώστε τους ορισμούς της συνέχειας και ομοιόμορφης συνέχειας και εξηγείστε την διαφορά τους. σελ. 145, σελ. 153

(β) Δώστε παραδείγματα:

(i) Ενός Α άπειρου συνόλου ώστε κάθε $f : A \to R$ να είναι συνεχής.

(ii) Συνάρτησης $f : R \to R$ που είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Έστω $f : (a, \beta) \to R$ είναι συνεχής συνάρτηση ώστε οι περιορισμοί της $f : (a, \gamma] \to R$, $f : [\gamma, \beta) \to R$ να είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 4ον

(α) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει δείξτε ότι $\lim a_n = 0$

(β) Αν $\lim \beta_n = \beta$ και $a_n = \beta_n - \beta_{n-1}$ δείξτε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \beta - \beta_1$

(γ) Υπολογίστε : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^n}$ για 0<α<2 [redacted]

(δ) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση για τις διάφορες τιμές του p την σειρά.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ για $p \geq 0$.

Θέμα 5ον

(α) Διατυπώστε το κριτήριο Riemann για την ολοκληρωσιμότητα μιας $f:[a,\beta] \to R$. [redacted]
(Δώστε τους αναγκαίους ορισμούς).

(β) Αν $f:[0,1] \to R$ με $f(t) = 0$ $\gamma\iota\alpha$ $t \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$. Δείξτε ότι η f είναι R ολοκληρώσιμη και υπολογίστε $\int_a^{\beta} f(t)dt$.

(γ) Δείξτε ότι αν η $f:[a,\beta] \to R$ είναι αύξουσα τότε είναι R- ολοκληρώσιμη.

Θέμα 6ον

(α) Αν $I_n = \int \eta\mu^n x dx$ δείξτε ότι $I_n = \frac{-\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}}{n}$

(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$\int \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} dx$, $\int \frac{dx}{(x+1)\cdot(x+2)^2}$, $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Απαντήστε στα 5 από τα 6 θέματα.